MATHÉMATIQUES

Groupe C

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème les fonctions qui seront considérées sont des fonctions réelles de variable réelle. Un polynôme réel définit une fonction qui sera encore appelée polynôme. De plus on dira qu'une série entière de la variable x est divisible par x^k si tous les termes d'ordre strictement inférieur à k dans cette série sont nuls.

Dans tout le problème, n, k, p et q désignent des entiers positifs ou nuls.

PRÉAMBULE

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Montrer que pour tout entier k il est possible de trouver deux polynômes réels P et Q de degrés au plus k, avec Q non nul, tels que la série qui représente la fonction QF − P soit divisible par x^{2k+1}.

(On cherchera les polynômes P et Q en écrivant le système des équations linéaires que satisfont les coefficients des polynômes P et Q et on établira que ce système admet une solution non nulle.)

Montrer que si la matrice d'ordre $k+1$:

$$M_k = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_k \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_k & u_{k+1} & \dots & u_{2k} \end{vmatrix}$$

n'est pas inversible il est possible de trouver une solution telle que degré P $< k$

Montrer que si Q_1 et P_1 sont deux polynômes de degrés au plus k, tels que la série qui représente la fonction $Q_1F - P_1$ est divisible par x^{2k+1}, on a :

$$Q_1 P - P_1 Q = 0$$

I

1° Montrer que la fonction :

$$x \longmapsto \int_0^1 u^n e^{-ux}\, du$$

coïncide pour tout x réel avec la somme d'une série entière.

2° Dans cette question, on se donne un polynôme f de degré au plus k.

Déterminer la dérivée par rapport à la variable u de la fonction définie pour x non nul par :

$$u \longmapsto e^{-ux}\left[\frac{f(u)}{x} + \frac{f'(u)}{x^2} + \dots + \frac{f^{(k)}(u)}{x^{k+1}}\right]$$

En déduire qu'il existe un couple unique de polynômes P et Q tels que :

$$(1) \qquad Q(x)e^x - P(x) = x^{k+1}e^x \int_0^1 f(u)e^{-ux}\, du \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et que ces polynômes sont de degrés au plus k.

On déterminera les coefficients de P et Q en fonction des valeurs en 0 et 1 de f et de ses dérivées.

3° Dans cette question, on se donne un polynôme Q non nul de degré au plus k :

$$Q(x) = q_0 x^k + q_1 x^{k-1} + \dots + q_k$$

Montrer que le procédé du 2°, appliqué au polynôme f de degré au plus k tel que :

$$f^{(n)}(0) = q_n\ ,\quad 0 \leqslant n \leqslant k\ ,$$

fournit l'unique polynôme P tel que la série représentant la fonction

$$Q(x)\, e^x - P(x)$$

est divisible par x^{k+1}.

.../...

E.N.S. ULM & SEVRES 1978

On pose p = degré P et q = degré Q.

Montrer que $p + q \geqslant k$ et déterminer f pour que $p + q = k$.

4° Utiliser le préambule pour montrer que la matrice d'ordre $k+1$:

$$M_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{k!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k+1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2k)!} \end{vmatrix}$$

est inversible pour tout k.

II

P_n et Q_n désignent les deux polynômes tels que :

$$(2) \qquad Q_n(x)\, e^x - P_n(x) = x^{2n+1} e^x \int_0^1 \frac{u^n (1-u)^n}{n!} e^{-ux}\, du \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1° Déterminer les termes de plus haut degré de Q_n et de P_n ; les signes des coefficients du polynôme P_n.

Déterminer $Q_n(0)$ et $P_n(0)$.

On pose :

$$Q_n(x)\, e^x - P_n(x) = x^{2n+1} B_n(x),$$

où $B_n(x)$ est la somme d'une série entière convergente.

2° Pour $n \geqslant 1$, établir l'identité :

$$P_{n-1}(x)\, Q_n(x) - P_n(x)\, Q_{n-1}(x) = 2.(-1)^{n+1} x^{2n-1}$$

En déduire que les polynômes P_n et Q_n n'ont pas de diviseur commun.

Ce résultat pouvait-il être déduit de I.4° ?

3° Établir les relations existant entre les polynômes

$$P_n(-x),\ Q_n(-x),\ P_n(x) \quad \text{et} \quad Q_n(x).$$

Pour $n \geqslant 2$, établir les identités :

$$x^2 P_{n-2}(x) - P_n(x) = (4n-2)\, P_{n-1}(x)$$
$$x^2 Q_{n-2}(x) - Q_n(x) = (4n-2)\, Q_{n-1}(x)$$

4° Si P'_n et Q'_n sont les dérivées des polynômes P_n et Q_n, montrer l'identité :

$$P_n(x)\, Q_n(x) + P_n(x)\, Q'_n(x) - P'_n(x)\, Q_n(x) = (-1)^n x^{2n}$$

(utiliser le fait que x^{2n} divise la série qui représente la fonction :

$$\frac{d}{dx}\left[\, Q_n(x)\, e^x - P_n(x) \,\right])$$

En déduire que les polynômes P_n et Q_n ont toutes leurs racines simples; qu'ils n'ont pas de racine réelle si n est pair et une seule racine dont on précisera le signe si n est impair.

III

1° On considère l'équation différentielle :

$$(3) \qquad xy'' - (x+2n)\, y' + ny = 0$$

Déterminer les séries entières dont la somme est une solution de l'équation (3). Étudier la convergence de ces séries.

Quels sont les termes d'ordre $n+1, n+2, \ldots, 2n$ d'une série entière solution de l'équation (3)?

2° Montrer que $P_n(x)$ et $e^x\, Q_n(x)$ sont deux solutions de l'équation (3).

En déduire un calcul explicite des coefficients du développement en série entière de la fonction $B_n(x)$ définie en II.1°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail